

A Lefschetz fixed point formula on manifolds with cylindric ends

Sönke SEIFARTH and Mikhail A. SHUBIN

Abstract – We give a definition of the Lefschetz number in L^2 -cohomologies for a class of maps of a manifold X with cylindric ends. As a particular case, we treat the case where the boundary of the manifold from which X was constructed is a union of disjoint spheres, and we obtain a formula for the Lefschetz number in terms of contributions of fixed points and the degree of the map.

Une formule de points fixes de Lefschetz pour les variétés à bouts cylindriques

Résumé – Nous donnons une définition du nombre de Lefschetz en L^2 -cohomologie d'une classe d'applications d'une variété X à bouts cylindriques. En particulier, nous traitons le cas où le bord de la variété à partir de laquelle X est construite est une union de sphères disjointes, et nous obtenons une formule de Lefschetz en termes de contributions de points fixes et du degré de l'application.

Version française abrégée – 1. Soit M une variété compacte de classe C^∞ de dimension n de bord $\partial M = N$ non vide. On note X une variété non compacte qui est obtenue par recollement du cylindre $N \times [0, +\infty)$ avec N . Supposons que X soit munie d'une métrique riemannienne de la forme $dn^2 \oplus dt^2$ sur le cylindre, où t est la coordonnée sur $[0, +\infty)$ et dn^2 est une métrique riemannienne sur N .

Soit $f: (M, N) \rightarrow (M, N)$ une application C^∞ de paires *i.e.* une application $f: M \rightarrow M$ de classe C^∞ qui envoie N dans lui-même. Soit $F = \{x \mid x \in M, f(x) = x\}$. Le point $x \in F$ est appelé non dégénéré si $\det(1 - df_x) \neq 0$ où $df_x: T_x M \rightarrow T_x M$ est la dérivée de f en x . Nous supposons que tous les points fixes de f sont non dégénérés et par conséquent isolés. Soit $F^0 = F \cap (M \setminus N)$, $F_b = F \cap N$. Si $x \in F_b$, alors il y a une application

$$a_x = df_x \bmod T_x N : T_x M / T_x N \rightarrow T_x M / T_x N$$

qui peut être identifiée avec un nombre $a_x \in \mathbb{R}$, $a_x \neq 0$, $a_x \neq 1$. Définissons les ensembles $F_+ = \{x \mid x \in F_b, a_x < 1\}$, $F_- = \{x \mid x \in F_b, a_x > 1\}$ des points fixes attractifs et répulsifs, respectivement.

LEMME 1. – Il existe une extension de f en une application C^∞ propre $\hat{f}: X \rightarrow X$ qui satisfait les conditions suivantes :

- (i) \hat{f} est linéaire par rapport à t quand $t \geq t_0$ où t_0 est choisit suffisamment grand ;
- (ii) il existe un compact $K \subset X$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\text{dist}(\hat{f}(z), z) > \varepsilon$ pour tout $z \in X \setminus K$;
- (iii) tous les points fixes de \hat{f} sont non dégénérés.

2. Soient respectivement $\Lambda^k(X)$ et $L^2 \Lambda^k(X)$ les espaces des formes extérieures sur X qui sont C^∞ ou de carré intégrable pour la norme induite par la métrique riemannienne. Introduisons l'espace des formes harmoniques

$$\mathcal{H}^k(X) = \{w \mid w \in \Lambda^k(X) \cap L^2 \Lambda^k(X), dw = \delta w = 0\}$$

où $d: \Lambda^k(X) \rightarrow \Lambda^{k+1}(X)$ est la différentiation extérieure et δ l'opérateur formellement conjugué à d . Alors \mathcal{H}^k est naturellement isomorphe à l'espace de L^2 -cohomologie réduite [4].

Soit P_k l'opérateur de projection orthogonale de $L^2 \Lambda^k(X)$ sur $\mathcal{H}^k(X)$. Si \hat{f} satisfait les conditions du lemme 1, alors \hat{f} définit une application $\hat{f}^*: \mathcal{H}^k(X) \rightarrow L^2 \Lambda^k(X)$ grâce à la

Note présentée par Mikhail GROMOV.

décroissance exponentielle des formes $\omega \in \mathcal{H}^k(X)$ quand $t \rightarrow +\infty$ [2]. Alors l'application $P_k \hat{f}^* : \mathcal{H}^k(X) \rightarrow \mathcal{H}^k(X)$ est bien définie.

THÉORÈME 1. — Soient $i : N \rightarrow M$ et $j : M \rightarrow X$ les injections naturelles. Alors le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} 0 \rightarrow \mathcal{H}^k(X) & \xrightarrow{j^*} & H^k(M, \mathbb{R}) & \xrightarrow{i^*} & H^k(N, \mathbb{R}) \\ & \downarrow P_k \hat{f}^* & \downarrow \hat{f}^* & & \downarrow \hat{f}^* \\ 0 \rightarrow \mathcal{H}^k(X) & \xrightarrow{j^*} & H^k(M, \mathbb{R}) & \xrightarrow{i^*} & H^k(N, \mathbb{R}) \end{array}$$

est commutatif.

COROLLAIRE. — La trace $\text{tr } P_k \hat{f}^*$ ne dépend que de f et est indépendante de la métrique et de l'extension \hat{f} de f .

Ce corollaire permet de définir le « L^2 -nombre de Lefschetz » par

$$L_{(2)}(f) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \text{tr } P_k \hat{f}^*.$$

Le calcul de ce nombre peut être fait dans le cas particulier suivant :

THÉORÈME 2. — Supposons M connexe, $N = \partial M$ non vide, N difféomorphe à une union de sphères disjointes $N_j = S^{n-1}$, $j = 1, \dots, q$. Alors :

$$L_{(2)}(f) = \sum_{x \in F^0 \cup F_-} v_x + (r-1) + (-1)^{n-1} \text{deg } f$$

où $v_x = \text{sign det}(1 - df_x)$ est la contribution standard du point fixe x , r est le nombre de sphères fixes i.e. de sphères qui sont appliquées dans elles-mêmes, $\text{deg } f$ est le degré de f sur M .

Notons que, même dans les exemples les plus simples, $L_{(2)}(f)$ ne peut être exprimé par les contributions des seuls points fixes.

The classical Lefschetz theorem (see e.g. [6]) gives a formula for the number of fixed points (with some multiplicities) of a map of a compact manifold into itself in terms of a cohomological invariant which is called the Lefschetz number. M. Atiyah and R. Bott [1] generalized this theorem replacing the de Rham complex which can be used to define usual cohomologies by a general elliptic complex. A similar result for manifolds with boundary was proved by A. V. Brenner and M. A. Shubin [3] and required a classification of boundary fixed points that can be attractive or repulsive.

This Note arose from an attempt to understand the simplest version of the result of [3] by glueing of cylindric ends to the boundary and using reduced L^2 -cohomologies of the obtained non-compact manifold which are finite-dimensional due to [2]. In this way we obtain a Lefschetz formula of a new type including some global invariants of the map (like the degree of this map) in addition to usual contribution of fixed points.

1. Let M be a compact C^∞ -manifold with a non-empty boundary $\partial M = N$, $\dim M = n$, X be a non-compact manifold which is obtained by glueing the cylinder $N \times [0, +\infty)$ to N . Let us assume that a Riemannian metric is given on X such that it is of the form $dn^2 \oplus dt^2$ on the cylinder $N \times [0, +\infty)$ where t is the standard coordinate on $[0, +\infty)$ and dn^2 is a Riemannian metric on N .

Let $f : (M, N) \rightarrow (M, N)$ be a C^∞ -map i.e. a C^∞ -map $f : M \rightarrow M$ which maps N into itself. Let F be the set of all fixed points of f i.e. $F = \{x \mid x \in M, f(x) = x\}$. If $x \in F$ then the derivative of f at x gives a linear map $df_x : T_x M \rightarrow T_x M$ where $T_x M$ where

$T_x M$ is the tangent space of M at x . The point $x \in F$ is called a *non-degenerate* fixed point if $\det(1 - df_x) \neq 0$ i.e. if 1 is not an eigenvalue of d . We shall always suppose that all the fixed points are non-degenerate.

Notice that all non-degenerate fixed points are isolated so there is a finite number of fixed points due to the compactness of M . Denote $F^0 = F \cap (M \setminus N)$, $F_b = F \cap N$ i.e. F^0 (resp. F_b) is the set of interior (resp. boundary) fixed points. Let us remind a classification of boundary fixed points from [3]. If $x \in F_b$ then df_x maps a subspace $T_x N \subset T_x M$ into itself and $\text{codim } T_x N = 1$. Therefore there is a map

$$a_x = df_x \text{ mod } T_x N : T_x M / T_x N \rightarrow T_x M / T_x N$$

which can be identified with a number $a_x \in \mathbb{R}$. It is easy to see that $a_x \geq 0$ and $a_x \neq 1$. A point $x \in F_b$ is called *attractive* if $0 \leq a_x < 1$ and *repulsive* if $a_x > 1$. Let F_+ (resp. F_-) denotes the set of all attractive (resp. repulsive) boundary fixed points.

LEMMA 1. — *There exists an extension of f to a proper C^∞ -map $\hat{f} : X \rightarrow X$ such that*

(i) \hat{f} is linear with respect to t when $t \geq t_0$ where t_0 is chosen sufficiently large (here t is the canonical coordinate along the axis of the cylinder);

(ii) there exist a compact $K \subset X$ and $\varepsilon > 0$ such that $\text{dist}(\hat{f}(z), z) > \varepsilon$ for every $z \in X \setminus K$;

(iii) all the fixed points of \hat{f} are non-degenerate.

Moreover \hat{f} can be so chosen that near infinity in the coordinates (y, t)

$$\hat{f}(y, t) = (g(y), \alpha(y)t)$$

where $\alpha(y) > 0$, and $g(y) = y$ implies $\alpha(y) \neq 1$.

2. Let $\Lambda^k(X)$ be the space of all exterior C^∞ -forms of degree k on X , $\Lambda_0^k(X)$ be the subspace of forms with compact supports, $L^2 \Lambda^k(X)$ be the Hilbert space of square integrable k -forms on X (with the inner product which is defined by the Riemannian metric on X). There is an orthogonal Kodaira decomposition [7]

$$L^2 \Lambda^k(X) = \mathcal{H}^k(X) \oplus \overline{d\Lambda_0^{k-1}(X)} \oplus \overline{\delta\Lambda_0^{k+1}(X)},$$

where $d : \Lambda^k(X) \rightarrow \Lambda^{k+1}(X)$ is the de Rham exterior differentiation operator, δ is formally adjoint operator to d , the bars mean closures in $L^2 \Lambda^k(X)$ and $\mathcal{H}^k(X)$ is the space of all square integrable harmonic forms on X i.e.

$$\mathcal{H}^k(X) = \{ \omega \mid \omega \in \Lambda^k(X) \cap L^2 \Lambda^k(X), d\omega = \delta\omega = 0 \}.$$

Let d^w denotes the weak or maximal closure of d on $L^2 \Lambda^k(X)$ with the domain

$$\mathcal{D}(d^w) = \{ \omega \mid \omega \in L^2 \Lambda^k(X), d\omega \in L^2 \Lambda^{k+1}(X) \}$$

where d is applied in the sense of distributions (and then $d^w \omega = d\omega$). Then in the Kodaira decomposition for $L^2 \Lambda^k(X)$

$$\text{Ker } d^w = \mathcal{H}^k(X) \oplus \overline{d\Lambda_0^{k-1}(X)}.$$

The reduced L^2 -cohomologies are defined as

$$L^2 H^k(X) = \text{Ker } d^w / \overline{d\Lambda_0^{k-1}(X)}$$

(see e.g. [4]), hence a natural isomorphism $L^2 H^k(X) \cong \mathcal{H}^k(X)$. Let $i : N \rightarrow M$ and $j : M \rightarrow X$ be natural inclusion maps. It is proved in [2] that the sequence

$$0 \rightarrow \mathcal{H}^k(X) \xrightarrow{d^*} H^k(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{i^*} H^k(N, \mathbb{R})$$

is exact for all $k=0, 1, \dots, n$. Here $H^k(M, \mathbb{R})$ is the usual absolute cohomology group of M with the field \mathbb{R} as the coefficient field; $H^k(M, \mathbb{R})$ can be defined by the de Rham

(ii) if z_1, \dots, z_q are the centers of the glued balls then the set of all fixed points of \bar{f} in $\bar{M} \setminus (M \cup \{z_1, \dots, z_q\})$ is a set F'_+ which is in a one-one correspondence with the set of all attractive fixed points of f in N ; moreover the standard contributions $v_{x'}$ of the fixed points $x' \in F'_+$ are opposite to the contributions v_x of the corresponding fixed points $x \in F_+$ i. e. $v_{x'} = -v_x$;

(iii) if $\bar{f}(z_j) = z_j$ then the derivatives $d\bar{f}|_{z_j}$ have all the eigenvalues in the unit circle; in particular $v_{z_j} = 1$.

So the Lefschetz formula \bar{M} can be applied and gives

$$(3) \quad L(\bar{f}) = \sum_{x \in F^0 \cup F_-} v_x + \mathbf{r}.$$

On the other hand it follows from (2) that

$$(4) \quad L(\bar{f}) = L_{(2)}(f) + 1 + (-1)^n \operatorname{tr} \bar{f}^*|_{H^n(\bar{M}, \mathbb{R})} = L(\hat{f}) + 1 + (-1)^n \deg f.$$

Clearly (3) and (4) imply (1). \square

Note that even in the simplest examples $L_{(2)}(f)$ can not be expressed in terms of the contributions of fixed points.

Note remise le 4 décembre 1989, acceptée le 2 janvier 1990.

REFERENCES

- [1] M. F. ATIYAH and R. BOTT, A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes, I, *Ann. of Math.*, série 2, 86, 1967, pp. 374-407.
- [2] M. F. ATIYAH, V. K. PATODI and I. M. SINGER, Spectral asymmetry and Riemannian geometry, I, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 77, 1975, pp. 43-69.
- [3] A. V. BRENNER and M. A. SHUBIN, Atiyah-Bott-Lefschetz theorem for manifolds with boundary, *Funct. Analysis and its Appl.*, 15, n° 4, pp. 67-68 (in Russian).
- [4] J. CHEEGER, On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds, *Proc. Symp. Pure Math.*, 36, 1980, pp. 91-146.
- [5] J. DODZIUK, De Rham-Hodge theory for L^2 -cohomology of infinite coverings, *Topology*, 16, 1977, pp. 157-165.
- [6] A. DOLD, *Lectures on algebraic topology*, Springer-Verlag, Berlin e. a., 1972.
- [7] K. KODAIRA, Harmonic fields in Riemannian manifolds, *Ann. of Math.*, 50, 1949, pp. 587-665.
- [8] S. ROSENBERG, Harmonic forms and L^2 -cohomology on manifolds with cylinders, *Indiana Univ. Math. Journal*, 34, 1985, pp. 355-373.

E. S. : *Karl-Weierstrass-Institut für Mathematik der A.d.W. der D.D.R.*,
Mohrenstrasse 39, D.D.R. 1086 Berlin;

M. A. S. : *Department of Mech. and Math.*, *Moscow State University*,
119899 Moscow, U.S.S.R.